

Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1993-07-01.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

Homogénéisation d'un problème à mémoire instantanée dans un milieu très finement perforé

Samia CHALLAL

Résumé — On étudie l'homogénéisation d'un domaine perforé de petits trous occupé par un fluide visqueux, compressible et barotrope. Le problème est de type élasticité à mémoire instantanée. Dans le problème asymptotique un phénomène de mémoire longue apparaît. On traite explicitement le cas des trous sphériques (de rayon $a_\varepsilon \ll \varepsilon$) répartis périodiquement dans tout le volume.

Homogenization of instantaneous memory problem in very finely perforated medium

Abstract — We study the homogenization of a perforated area with tiny holes in which lies a viscous compressible and barotropic fluid. The problem is of elasticity type with instantaneous memory. In the asymptotic problem, a long memory phenomenon appears. We study the case of spherical holes (with radius $a_\varepsilon \ll \varepsilon$) periodically distributed in the whole volume.

Abridged English Version — We study the homogenization of viscoelastic equations in a open set Ω_ε obtained as follows (see [2]) : let Ω be a bounded open set with smooth boundary in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). The set Ω is covered with a regular mesh of size 2ε , each cell being a cube $]-\varepsilon; +\varepsilon[^n$ which is perforated at its center by a tiny hole T_ε equal to $a_\varepsilon \bar{B}_1$ where B_1 is the unit ball and a_ε is the hole's size. We obtain Ω_ε by removing from Ω all the holes T_ε which do not cut the boundary $\partial\Omega$.

Let $F \in L^2(0, +\infty, (L^2(\Omega))^n)$. For each $\varepsilon > 0$ and $T > 0$ there exists a unique solution of the problem:

$$(P_\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Find } U_\varepsilon \in \tilde{W}_c[H_0^1(\Omega_\varepsilon)] \text{ such that:} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 U_{\varepsilon,i}}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U_\varepsilon) + F_i \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \quad i = 1, \dots, n \\ U_\varepsilon(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x, t) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_\varepsilon \end{array} \right.$$

where $\sigma_{ij}(u) = c_0^2 \rho_0 \delta_{ij} \delta_{kh} \varepsilon_{kh}(u) + (\eta \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk})) \varepsilon_{kh} (\partial u / \partial t)$ and c_0, ρ_0, η, μ are physical data such that: $n\eta + 2\mu\alpha > 0$ with $0 < \alpha < 1$, $\mu > 0$ and $\rho_0 > 0$.

The Hilbert space $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]$ is defined by (see [5]):

$$\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega_\varepsilon)] = \left\{ v \in L^2(0, T, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n); \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n); \frac{dCv'}{dt} \in L^2(0, T, [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \right\}$$

and the operator C by:

$$\langle Cu, v \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_0 uv \, dx, \quad \forall u, v \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n.$$

The extension $\tilde{U}_\varepsilon$ by 0 in $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ of the displacement U_ε , is bounded in $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]$ when ε goes to 0. In order to pass to the limit in (P_ε) with the energy method (as in [4]) we

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

make theoretical assumptions (see [1], [4]) which lead to the following choice for a_ε :

$$a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^{n/(n-2)} \quad \text{for } n \geq 3, \quad a_\varepsilon = e^{-C_0/\varepsilon^2} \quad \text{for } n=2 \quad \text{with } C_0 > 0.$$

Then we prove (see [3] for details).

THEOREM. — *Let U_ε be the solution of (P_ε) . Then $\tilde{U}_\varepsilon$ converges weakly to U in $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)]$ where U is the unique solution of (P) :*

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Find } U \in \tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)] \text{ such that:} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U) - (G * U)_i + F_i \quad \text{in } \Omega, \quad i=1, \dots, n \\ U(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{in } \Omega \\ U(x, t) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{array} \right.$$

where $G = L^{-1}(M)$, L is the Laplace transform and M is a symmetric positive matrix.

1. POSITION DU PROBLÈME. — Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), de classe C^1 par morceaux. Soient ε un paramètre destiné à tendre vers 0 et $(T_v^\varepsilon)_{1 \leq v \leq n(\varepsilon)}$ une suite de fermés disjoints (les trous) à frontières suffisamment régulières pour que l'ouvert Ω_ε défini par $\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcup_{v=1}^{n(\varepsilon)} T_v^\varepsilon$ soit de classe C^1 par morceaux. On considère le problème suivant (cf. [6]) : trouver $U_\varepsilon(x, t)$ (déplacement du fluide) tel que:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial^2 U_{\varepsilon,i}}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U_\varepsilon) + F_i \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ U_\varepsilon(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{array} \right.$$

où $F \in L^2(0, +\infty, (L^2(\Omega))^n)$, c_0 est la vitesse du son, ρ_0 la masse volumique du fluide, η et μ sont les coefficients de viscosité et satisfont à : $n\eta + 2\mu\alpha > 0$ avec $0 < \alpha < 1$ et $\mu > 0$. Les contraintes sont données par :

$$\sigma_{ij}(u) = c_0^2 \rho_0 \delta_{ij} \delta_{kh} \varepsilon_{kh}(u) + (\eta \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk})) \varepsilon_{kh}(\partial u / \partial t).$$

Une formulation faible associée à (1) (cf. [5]) est :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U_\varepsilon \text{ vérifiant } \forall T > 0 : U_\varepsilon \in \tilde{W}_c[H_0^1(\Omega_\varepsilon)] \\ \frac{d}{dt} c(U'_\varepsilon, v) + a(U_\varepsilon, v) + b(U'_\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} F v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(0, T) \\ U_\varepsilon(0) = 0; \quad U'_\varepsilon(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} c(U, V) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_0 UV \, dx; & a(U, V) &= \int_{\Omega_\varepsilon} c_0^2 \rho_0 \operatorname{div} U \operatorname{div} V \, dx \\ b(U, V) &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\eta \operatorname{div} U \operatorname{div} V + 2\mu \varepsilon_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(V)) \, dx. \end{aligned}$$

L'espace de Hilbert $\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]$ est défini par (cf. [5]) :

$$\tilde{W}_c[H_0^1(\Omega_\varepsilon)] = \left\{ v \in L^2(0, T, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n); \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n); \frac{dCv'}{dt} \in L^2(0, T, [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \right\}$$

où C est donné par :

$$\langle Cu, v \rangle = c(u, v), \quad \forall u, v \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n.$$

Par passage à la transformée de Laplace dans la formulation faible [$u = L(U)$ désignera la transformée de Laplace de $\tilde{U}$], on obtient :

$$(3) \quad \left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \text{ est l'unique solution dans } [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \text{ vérifiant :} \\ \lambda^2 \rho_0 u_{\varepsilon i} - \partial_j (a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(u_\varepsilon)) = f_i \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

où

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} a_{ijlh} = c_0^2 \rho_0 \delta_{ij} \delta_{lh} + \lambda (\eta \delta_{ij} \delta_{lh} + \mu (\delta_{il} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jl})) \\ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \beta, \quad \beta \text{ réel positif quelconque.} \end{array} \right.$$

On déduit une estimation *a priori* puis l'existence d'une sous-suite notée encore $(\tilde{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ telle que $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $[H_0^1(\Omega)]^n$ faible. Le symbole $\tilde{\cdot}$ désigne l'opérateur de prolongement par 0 dans $\Omega - \Omega_\varepsilon$ qui opère de $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2. CADRE ABSTRAIT ET THÉORÈME DE CONVERGENCE. — On veut trouver le problème limite vérifié par u et le problème correspondant en temps. Une adaptation des travaux de D. Cioranescu et F. Murat (cf. [4]) à notre cas, nous conduit à introduire le cadre abstrait d'hypothèses suivantes :

Hypothèses (H1)-(H6). — On suppose que les trous sont tels qu'il existe des fonctions ω_k^ε et μ_k telles que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$(H1) \quad \omega_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^n;$$

$$(H2) \quad \omega_k^\varepsilon = 0 \text{ sur les trous } (T_v^\varepsilon)_{v=1}^{n(\varepsilon)};$$

$$(H3) \quad \omega_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k \text{ dans } [H^1(\Omega)]^n \text{ faible où } e_k \text{ est le } k\text{-ième vecteur de base de } \mathbb{R}^n;$$

$$(H4) \quad \mu_k \in [W^{-1, \infty}(\Omega)]^n;$$

$$(H5) \quad \forall (v_\varepsilon), v \text{ vérifiant :}$$

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ dans } [H^1(\Omega)]^n \text{ faible,} \quad v_\varepsilon = 0 \text{ sur les trous } (T_v^\varepsilon)_{v=1}^{n(\varepsilon)}$$

et pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on a :

$$\langle -\partial_h (a_{ijlh} \varepsilon_{ij}(\omega_k^\varepsilon)), \varphi(v_\varepsilon)_l \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle \mu_k, \varphi v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)};$$

$$(H6) \quad \text{Il existe une distribution } G \in \mathfrak{D}'([0, +\infty[, W^{-1, \infty}(\Omega)]^{n^2}) \text{ telle que :}$$

$$G(t) = L^{-1}(M(\lambda))$$

où $M(\lambda)$ désigne la matrice définie par ses colonnes $(\mu_k)_{k=1}^n$.

Remarque 1. — La matrice $M(\lambda)$ est symétrique et $\operatorname{Re} \langle M \varphi, \bar{\varphi} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0$, pour tout $\varphi \in [\mathfrak{D}(\Omega)]^n$ (cf. [3]).

Remarque 2. — On a quasi-unicité des fonctions ω_k^ε et μ_k . En effet si $(\omega_k^\varepsilon, \mu_k)_{k=1}^n$ et $(\omega_k^{\varepsilon'}, \mu_k^{\varepsilon'})_{k=1}^n$ sont deux groupes de fonctions vérifiant (H1)-(H5) pour une même suite de trous alors on montre que : $\mu_k' = \mu_k$ dans Ω et $\varepsilon(\omega_k^\varepsilon - \omega_k^{\varepsilon'}) \rightarrow 0$ dans $L_{loc}^2(\Omega)$ fort (voir [3]).

THÉORÈME 1. — Sous les hypothèses (H1)-(H6), on a :

$$(5) \quad \text{Il existe } U \in \mathfrak{D}'([0, +\infty[, H_0^1(\Omega)]^n) \text{ tel que : } u(\lambda) = L(U), \quad \operatorname{Re} \lambda > \beta > 0;$$

$$(6) \quad \tilde{U}_\varepsilon \rightharpoonup U \text{ dans } \tilde{W}_c[H_0^1(\Omega)] \text{ faible;}$$

La distribution U est l'unique solution du problème :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ij}(U) - (G * U)_i + F_i \quad \text{dans } \Omega, \quad i = 1, \dots, n \\ U(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ U(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Remarque 3. — Notons que le théorème 1 est vérifié dès que (H1)-(H6) sont vérifiés sans aucune autre hypothèse sur la distribution ou la forme des trous dans le domaine. Comme exemple d'application, on étudiera le cas des trous sphériques répartis périodiquement dans tout le volume. Ces hypothèses imposeront alors une taille critique des trous (voir [4]).

Remarque 4. — Initialement le problème était du type élasticité à mémoire instantanée. Après homogénéisation le problème limite est d'élasticité à mémoire longue.

Démonstration. — Les hypothèses abstraites (H1)-(H5) permettent le passage à la limite dans la formulation variationnelle de (3) par la méthode de l'énergie (cf. [4]). L'hypothèse (H6) nous permet de retrouver le problème en temps. Pour les détails, voir [3].

3. APPLICATION. — Maintenant, on va considérer le cas des petits trous sphériques répartis périodiquement dans tout le domaine. On montre que les hypothèses (H1)-(H6) sont satisfaites et on explicite les μ_k .

Soit B_1 la boule ouverte de centre l'origine et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On couvre Ω d'un maillage régulier de taille 2ε . Chaque cellule est un cube P_v^ε identique à $(-\varepsilon, +\varepsilon)^n$. Au centre de chaque P_v^ε inclus dans Ω est centré un trou sphérique T_v^ε , l'homothétique de rapport a_ε de la boule fermée $\bar{B}_1$. La taille a_ε est donnée par : $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^{n/n-2}$ pour $n \geq 3$; $a_\varepsilon = e^{-C_0/\varepsilon^2}$ pour $n=2$ avec $C_0 > 0$. On ne considère que les trous T_v^ε dont la distance à $\partial\Omega$

est de l'ordre de grandeur de ε . On pose $\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcap_{v=1}^{n(\varepsilon)} T_v^\varepsilon$ et $K_v^\varepsilon = P_v^\varepsilon \setminus (T_v^\varepsilon \cup \bar{C}_v^\varepsilon)$ où C_v^ε est la boule ouverte de centre le centre de P_v^ε et de rayon ε .

(i) *Calcul explicite des ω_k^ε .* — On définit les fonctions $(\omega_k^\varepsilon)_{1 \leq k \leq n}$ sur l'ouvert Ω par :

— Pour tout P_v^ε tel que P_v^ε coupe $\partial\Omega$, on prend :

$$\omega_k^\varepsilon = e_k \quad \text{dans } P_v^\varepsilon \cap \Omega;$$

— Pour tout P_v^ε entièrement inclus dans Ω , on prend : $\omega_k^\varepsilon \in H^1(P_v^\varepsilon)$ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_k^\varepsilon = e_k \quad \text{dans } K_v^\varepsilon \\ -\partial_j (a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = 0 \quad \text{dans } C_v^\varepsilon. \\ \omega_k^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } T_v^\varepsilon \end{array} \right.$$

On calcule ω_k^ε dans C_v^ε . On prend comme origine de l'espace le centre de T_v^ε . On note $(e_k)_{k=1}^n$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $(x_k)_{k=1}^n$ les coordonnées d'un point dans cette base, par $r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ la coordonnée radiale et par e_r le vecteur unitaire radial. On cherche alors ω_k^ε dans C_v^ε sous la forme [1] :

$$\omega_k^\varepsilon = x_k r f(r) e_r + g(r) e_k \quad \text{pour } r \in [a_\varepsilon, \varepsilon],$$

où f et g sont des fonctions régulières.

On trouve : si $n \geq 3$,

$$\left| \begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{r^n} \left[-\varepsilon^n + C_0^2 \frac{\varepsilon^{n^2/(n-2)}}{r^2} \right] + 1 \right) [1 + o(1)] \\ g(r) &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{r^n} \left[-C_0^2 \frac{\varepsilon^{n^2/(n-2)}}{n} - \frac{1+2m}{n-2} \varepsilon^n r^2 \right] - \frac{n+1+2m}{2(1+nm)} r^2 + b \varepsilon^2 \right) [1 + o(1)] + 1 \end{aligned} \right|$$

où

$$a = \frac{1}{C_0^{n-2}} \left[\frac{1}{n} + \frac{1+2m}{n-2} \right], \quad m = \frac{\lambda \mu}{c_0^2 \rho_0 + \lambda \eta + \lambda \mu}, \quad b = \frac{1+2m}{n-2} + \frac{n+1+2m}{2(1+nm)}$$

et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(1) = 0$; si $n = 2$,

$$\left| \begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{(1+2m)C_0} \left[-\frac{\varepsilon^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2 e^{-2C_0/\varepsilon^2}}{r^4} + 1 \right] [1 + o(1)] \\ g(r) &= \frac{1}{C_0} \left(\varepsilon^2 \log r - \frac{1}{1+2m} \frac{\varepsilon^2 e^{-2C_0/\varepsilon^2}}{2r^2} - \frac{2m+3}{2(1+2m)^2} r^2 - \varepsilon^2 \log \varepsilon \right) [1 + o(1)] + 1. \end{aligned} \right|$$

(ii) *Calcul explicite des μ_k .* — On va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — Les hypothèses (H1)-(H6) sont vérifiées avec :

$$\mu_k = \frac{S_n}{2^{n-1}a} (m+1) e_k \quad \text{pour } n \geq 3 \quad \text{et} \quad \mu_k = \frac{\lambda \mu}{C_0} \pi \frac{1+m}{1+2m} e_k \quad \text{pour } n = 2,$$

où S_n est l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées par construction. Pour vérifier (H3), on établit les estimations locales suivantes :

$$\left| \begin{aligned} |\nabla \omega_k^\varepsilon|_{L^2(C_v^\varepsilon)}^2 &\leq c \varepsilon^n, & |\omega_k^\varepsilon - e_k|_{L^p(C_v^\varepsilon)}^p &\leq c \end{aligned} \right| \begin{array}{ll} \varepsilon^7 & \text{si } n=3 \\ \varepsilon^8 |\log \varepsilon| & \text{si } n=4 \\ \varepsilon^{n^2/(n-2)} & \text{si } n \geq 5 \\ \varepsilon^4 |\log \varepsilon|^2 & \text{si } n=2 \end{array}$$

où c est une constante indépendante de ε (cf. [1]).

En utilisant le fait que le nombre de pavés inclus dans Ω est $n(\varepsilon) = (|\Omega|/(2\varepsilon)^n) [1 + o(1)]$ où $|\Omega|$ est la mesure de Ω , on obtient les estimations dans tout le domaine.

Enfin, on montre que :

$$-\partial_j (a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon)) = \mu_{k,i}^\varepsilon - \gamma_{k,i}^\varepsilon$$

$$\mu_k^\varepsilon = \sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon) (e_r^v \cdot e_j) e_i) \delta_v^\varepsilon \quad \text{et} \quad \gamma_k^\varepsilon = \sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} (a_{ijlh} \varepsilon_{lh}(\omega_k^\varepsilon) (e_r^v \cdot e_j) e_i) \delta_{T_v^\varepsilon}$$

où e_r^v est le vecteur radial dans P_v^ε et r est la coordonnée radiale dans P_v^ε . La distribution δ_v^ε (resp. $\delta_{T_v^\varepsilon}$) est la masse unité portée par la sphère $\partial C_v^\varepsilon \cap \partial K_v^\varepsilon$ (resp. ∂T_v^ε).

On a $\langle \gamma_k^\varepsilon, v \rangle = 0$, pour tout $v \in [H_0^1(\Omega)]^n$ tel que $v = 0$ sur T_v^ε , $1 \leq v \leq n(\varepsilon)$. Donc pour vérifier (H5) il suffit de montrer qu'il existe $\mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n$ tel que $\mu_k^\varepsilon \rightarrow \mu_k$ dans $[H^{-1}(\Omega)]^n$ fort.

On explicite les μ_k . On trouve pour $n \geq 3$:

$$\mu_k^\varepsilon = \left[\left(1 + 2m - \frac{n+1+2m}{1+nm} \right) \frac{1}{a} \left(\sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_v^\varepsilon \right) e_k - \left(\frac{2-n-n^2}{1+nm} - (n+2) \right) \frac{1}{a} \left(\sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon (e_r^v \cdot e_k) e_r^v \delta_v^\varepsilon \right) \right] [1 + o(1)];$$

pour $n=2$:

$$\mu_k^\varepsilon = \left[\frac{\lambda\mu}{C_0} \left(1 - \frac{2m+3}{(1+2m)^2} \right) \left(\sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_v^\varepsilon \right) e_k + \frac{4\lambda\mu}{(1+2m)C_0} \left(1 + \frac{1}{1+2m} \right) \left(\sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon (e_r^v \cdot e_k) e_r^v \delta_v^\varepsilon \right) e_k \right] [1 + o(1)].$$

On déduit alors (H5) en utilisant les convergences ci-dessous (cf. [1]) :

$$\sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_v^\varepsilon \rightarrow \frac{S_n}{2^n} \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort}$$

et

$$\sum_{v=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon (e_r^v \cdot e_k) e_r^v \delta_v^\varepsilon \rightarrow \frac{S_n}{n 2^n} e_k \quad \text{dans } [H^{-1}(\Omega)]^n \text{ fort.}$$

L'hypothèse (H6) est trivialement vérifiée car chaque $\mu_k \cdot e_i$ est une fraction de λ .

Remarque 5. — En adaptant les travaux de [4] et [1] à notre cas, on peut vérifier ces hypothèses dans le cas d'une répartition périodique des trous de forme quelconque dans tout le volume ou sur un hyperplan traversant Ω . Pour plus de détails, voir [3].

Note remise le 8 février 1993, acceptée après révision le 11 mai 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. ALLAIRE, Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes, *Thèse de Doctorat*, Université Paris-VI, 1989.
- [2] G. ALLAIRE, Homogénéisation des équations de Stokes dans un domaine perforé de petits trous répartis périodiquement, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série I, 1989, p. 741-746.
- [3] S. CHALLAL, *Homogénéisation d'un problème à mémoire instantanée dans un milieu très finement perforé*, Rapport interne, Université de Metz, n° 05/93.
- [4] D. CIORANESCU et F. MURAT, Un terme étrange venu d'ailleurs, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, in *Collège de France Seminar*, H. BREZIS et J.-L. LIONS éd., Research Notes Math., 60, Pitman, London, II, 1982, p. 98-138.
- [5] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Évolution : Fourier, Laplace*, 7, Masson, Paris, 1987.
- [6] J. SANCHEZ-HUBERT, Asymptotic study of the macroscopic behaviour of a solid-fluid mixture, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2, 1980, p. 1-11.

Département de Mathématiques, Université de Metz,
Ile-de-Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France.